Das Ellipsoid

elementar bearbeitet

von

Aug. Jenny.

Inhalt:

Die Ellipse. — Das Ellipsoid im Allgemeinen. — Rotationsellipsoide. — Das dreiaxige Ellipsoid. — Schiefe Schnitte. — Ellipsoid und Cylinder.

Einladungsschrift

zur

Promotionsfeier

der

beiden Gymnasien und der Realschule.

1877.

Basel.
Schweighauserische Buchdruckerei.
1877.

Die Ellipse.

Die folgenden Sätze über das Verhältniß der Ellipse zum um- und eingeschriebenen Kreise hätten durch Anwendung der Flächenprojection viel kürzer erledigt werden können. Wir haben aber die ausführlichere Ableitung durch Proportionen dennoch beibehalten, weil sie uns dem ganzen Entwicklungsgange besser zu entsprechen schien.

Entstehung der Ellipse aus dem Kreise.

Verlängert oder verkürzt man alle Ordinaten, welche senkrecht auf dem Durchmesser eines Kreises errichtet sind, um einen bestimmten Theil ihrer Größe, so erhält man Ellipsen, deren Inhalte in bestimmtem Verhältniß zum Inhalt des betreffenden Kreises stehen.

Denken wir uns zwei Zahlen a und b und zwar so, daß die Zahl $a > b$ ist und machen wir:

die Ordinaten der einen Ellipse $\frac{a}{b}$ mal so groß als die des Kreises und die Ordinaten der andern Ellipse $\frac{b}{a}$ mal so groß als die des Kreises, so muß, da die Summe aller Parallelstreifen zwischen unendlich vielen Ordinaten, sowohl die Kreisfläche, als auch die Flächen der betreffenden Ellipsen giebt,

der Inhalt der Ellipse Fig. 1 $= \frac{a}{b} \cdot r^2 \cdot \pi$

und „ „ „ „ Fig. 2 $= \frac{b}{a} \cdot r^2 \cdot \pi$ sein.

Die größte aller Ordinaten der Ellipse in Fig. 1 ist CE und heißt die halbe große Axe der Ellipse, während der Kreisdurchmesser selbst die kleine Axe der Ellipse genannt wird. In Fig. 2 ist CE die Ellipsenordinate, welche dem Halbmesser CD des Kreises entspricht, und heißt in diesem Falle die halbe kleine Axe der Ellipse, während der Kreisdurchmesser hier zur großen Axe wird.

Im ersten Fall ist $r = b$, weil der Kreis die kleine Axe der Ellipse zum Durchmesser hat, und der

$$\text{Inhalt der Ellipse Fig. 1} = \frac{a}{b} \cdot b^2 \cdot \pi = a \cdot b \cdot \pi.$$

Im zweiten Fall ist $r = a$, weil der Kreis die große Axe der Ellipse zum Durchmesser hat, und der

$$\text{Inhalt der Ellipse Fig. 2} = \frac{b}{a} \cdot a^2 \cdot \pi = a \cdot b \cdot \pi.$$

In der Folge wollen wir die Ellipsen durch ihre halben Axen bezeichnen, z. B.: Ellipse AEB Fig. 1 durch AC, CE oder kürzer b, a, die Ellipse AEB Fig. 2 durch AC, CE oder a, b.

Wenn wir mit dem Halbmesser a vom Schnittpunkte der Axen aus einen Kreis construiren, so erhalten wir den, der Ellipse umschriebenen Kreis, während der Kreis mit dem Halbmesser b der Ellipse eingeschrieben ist.

Aus obigen Inhaltsvergleichungen finden wir folgende Proportionen:

Inhalt des umgeschr. Kreises : Inhalt der Ellipse = a : b und Inhalt der Ellipse : Inhalt des eingeschr. Kreises = a : b; woraus folgt: Inhalt des umgeschr. Kreises : Inhalt der Ellipse = Inhalt der Ellipse : Inhalt des eingeschr. Kreises oder anders ausgedrückt:

Die Fläche einer Ellipse verhält sich zur Fläche des ihr umschriebenen Kreises wie die kleine Axe zur großen.

Die Fläche einer Ellipse verhält sich zur Fläche

des ihr eingeschriebenen Kreises wie die große Axe zur kleinen.

Die Fläche der Ellipse ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Flächen des um- und eingeschriebenen Kreises.

Wenn eine Ellipse Fig. 3 durch eine Sehne AB, die senkrecht zur großen Axe steht, geschnitten wird, so erhält man den Abschnitt BqA. Zieht man die Geraden Bp und Ao senkrecht auf die kleine Axe der Ellipse oder den Durchmesser des eingeschriebenen Kreises und verbindet die zwei Durchschnittspuncte f und g durch die Sehne fg, so schneidet diese vom Kreis das Segment fsg ab. Wir wollen dasselbe das Projectionssegment des elliptischen Segmentes BqA nennen.

Es verhält sich nun:

$$BqA : fsg = a : b$$

oder in Worten:

Ein Ellipsensegment, das senkrecht zur großen Axe abgeschnitten ist, verhält sich zu seinem Projectionssegment auf dem eingeschriebenen Kreise wie die große Axe zur kleinen.

Beweis. Wir nehmen eine beliebige Ordinate hn zu Hülfe und zeigen, daß die Stücke derselben, welche in den beiden besprochenen Segmenten liegen, sich verhalten wie a : b.

Es verhält sich:

$$hn : kn = a : b$$

und ebenso $Bp : fp = a : b$

folglich $hn : kn = Bp : fp$

oder $hn : Bp = kn : fp$

$$hn - Bp : hn = kn - fp : kn$$

$$hi : hn = km : kn$$

$$hi : km = hn : kn$$

$$hi : km = a : b.$$

Da dieses Verhältniß für alle Ordinatenstücke gilt, welche in den beiden Segmenten liegen, so gilt es auch für die Summe

aller zwischen diesen Ordinaten liegenden Parallelstreifen, also für die beiden Segmente selber.

Ein Ellipsensegment, das senkrecht zur großen Axe abgeschnitten ist, verhält sich zu seinem Projectionssegment auf dem umschriebenen Kreise wie die kleine Axe zur großen;
oder Fig. 4

$$AqB : gqf = b : a.$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Anschauung nach oben angegebener Entstehung der Ellipse.

Ein Ellipsensegment, das senkrecht zur kleinen Axe abgeschnitten ist, verhält sich zu seinem Projectionssegment auf dem eingeschriebenen Kreise wie die große Axe zur kleinen;
oder Fig. 5

$$ApB : gpf = a : b.$$

Beweis wie vorhin durch Anschauung.

Ein Ellipsensegment, das senkrecht zur kleinen Axe abgeschnitten ist, verhält sich zu seinem Projectionssegment auf dem umschriebenen Kreise wie die kleine Axe zur großen;
oder Fig. 6

$$AhB : gkf = b : a.$$

Beweis. Wir nehmen eine beliebige Ordinate kn zu Hülfe und zeigen, daß die in den Segmenten liegenden Stücke derselben in dem betreffenden Verhältnisse stehen.

Es ist: $kn : hn = a : b$
$fp : Bp = a : b$
daher $kn : hn = fp : Bp$
$kn : fp = hn : Bp$
$kn - fp : kn = hn - Bp : hn$
$km : kn = hi : hn$
$km : hi = kn : hn$
$km : hi = a : b.$

Da dieses Verhältniß für alle Ordinatenstücke in den 2 Segmenten gilt, so muß es auch für die Flächen der Segmente gelten.

Ein Ellipsensegment, das schief zu den Axen abgeschnitten ist, verhält sich zu seinen Projectionssegmenten auf dem ein- und umschriebenen Kreise wie die große Axe zur kleinen und umgekehrt.

1. Fall. Fig. 7, wenn der Schnitt nur durch die große Axe geht, nehmen wir der Einfachheit wegen den eingeschriebenen Kreis:

$$AhB : gkf = a : b.$$

Beweis: Wir legen wieder beliebigen Ortes eine Ordinate durch beide Segmente. Die verlängerte Kreissehne gf muß mit der verlängerten Sehne AB in dem Puncte d der verlängerten kleinen Axe zusammentreffen, weil Bp und Ao vom Kreis in gleichem Verhältniß geschnitten werden.

Es ist nun $in : Ao = nd : od$

$mn : go = nd : od$

folglich $in : Ao = mn : go$

$in : mn = Ao : go$

oder $in : mn = a : b$

und da $hn : kn = a : b$

so folgt $hn : in = kn : mn$

und $hn - in : in = kn - mn : mn$

$hi : in = km : mn$

$hi : km = in : mn$

$hi : km = a : b.$

Da dieß Verhältniß für alle parallelen Ordinatenstücke in den Segmenten gilt, so gilt es auch für die Inhalte der Segmente selbst.

Um aber die Kreissehne fg und dadurch den Inhalt des Kreissegmentes selbst berechnen zu können, muß außer der Ellipsensehne AB und den Axen der Ellipse auch noch der Winkel gegeben sein, welchen die Axen der Ellipse mit der

Sehne AB bilden. Da aber diese beiden Winkel sich zu 90° ergänzen, so genügt es natürlich, einen von ihnen zu kennen.

Es sei α der Winkel, den die Sehne AB mit der kleinen Axe macht. Man findet den $\angle \beta$, den die Kreissehne fg mit der nämlichen Axe bildet, auf einfache Weise wie folgt:

Man merke, daß $dp \cdot tg\ \alpha = Bp$

$dp \cdot tg\ \beta = fp$ ist

woraus folgt, daß

$$\frac{dp \cdot tg\,\alpha}{dp \cdot tg\,\beta} = \frac{Bp}{fp} = \frac{a}{b}$$

oder $$tg\,\beta = \frac{b}{a} \cdot tg\,\alpha \text{ ist.}$$

Um fg zu bestimmen beachte man

daß $po = AB \cdot \cos\alpha$

aber auch $po = fg \cdot \cos\beta$

woraus folgt, daß

$$fg = AB \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

Wie man aus einer Kreissehne und dem Radius den Kreisabschnitt berechnet, wollen wir nicht weiter ausführen.

2. Fall. Fig. 8, wenn die Sehne AB nur die kleine Axe der Ellipse schneidet, nehmen wir den umschriebenen Kreis zu Hülfe. Es verhält sich dann

$$AKB : fhg = b : a.$$

Beweis: Die verlängerte Sehne AB muß mit der verlängerten Sehne fg im gleichen Puncte d der verlängerten großen Axe zusammentreffen, weil die Ordinaten fo und gp von der Ellipse im gleichen Verhältniß geschnitten werden.

Die Ordinate hn ist an beliebigem Orte durch die beiden Segmente gezogen. Es verhält sich dann wieder:

$$in : fo = nd : od$$

und $$mn : Ao = nd : od$$

folglich in : fo = mn : Ao
oder in : mn = fo : Ao
d. h. in : mn = a : b
und da auch hn : kn = a : b
so muß hn : kn = in : mn sich verhalten.
Ferner ist hn : in = kn : mn
und hn — in : hn = kn — mn : kn
oder hi : hn = km : kn
und hi : km = hn : kn
folglich hi : km = a : b
oder wenn man lieber will
km : hi = b : a.

Da dieses Schnittverhältniß für alle Ordinaten zwischen den Puncten A und B gilt, so behält es auch für die Flächeninhalte der Segmente selbst seine Richtigkeit.

Die Berechnung des Kreissegmentes geschieht auf ähnliche Art wie im vorhergehenden Falle.

3. Fall. Fig. 9.

Schneidet die Ellipsensehne AB beide Axen der Ellipse, so bleibt das Verhältniß des Ellipsensegmentes zu den Projectionssegmenten des um- und eingeschriebenen Kreises dasselbe wie in den vorher beschriebenen Fällen. Wir nehmen der deutlicheren Figur wegen den umschriebenen Kreis und haben daher zu zeigen, daß

AltvB : dlseh = b : a sich verhält.

Beweis.

Wir bemerken zuerst, daß die Kreissehne dh durch den Punct q gehen muß, in welchem die Ellipsensehne AB die große Axe schneidet und zwar darum, weil die zwei Ordinaten kd und rh in A und B im nämlichen Verhältniß getheilt sind. Wir notiren ferner die Ordinate qs, welche auf dem Schnittpunct der Sehnen und der großen Axe steht, sowie die

Ordinate ce, welche durch den Schnittpunct der Ellipse und der Kreissehne geht.

Das Ellipsensegment sowohl, als das Kreissegment sind nun in 5 Abschnitte zerlegt, welche alle im gleichen Verhältniß stehen:

1tens Aqk : dqk = b : a
2tens Akl : dkl = b : a
3tens lqt : lqs = b : a
4tens qpvt : qves = b : a
5tens pvB : vhe = b : a

Die 3 ersten Proportionen ergeben sich aus unmittelbarer Anschauung, und um die beiden andern zu finden, zieht man durch jedes Ausschnittpaar eine Ordinate.

Durch die beiden Stücke qpvt und qves legen wir die Ordinate xy,

dann verhält sich: xy : xz = a : b
xo : xu = a : b
daher xy : xz = xo : xu
xy : xo = xz : xu
xy — xo : xy = xz — xu : xz
oy : xy = uz : xz
oy : uz = xy : xz
oy : uz = a : b

und durch die beiden dreieckigen Ausschnitte pvb und vhe legen wir mn,

dann ist wieder mn : gn = a : b
fn : in = a : b
mn : gn = fn : in ꝛc.

und schließlich mf : gi = a : b

Da dieses Verhältniß für alle Ordinaten in den beiden Paaren von Ausschnitten gilt, so stehen die Flächen der Ausschnitte selbst im gleichen Verhältniß.

Wenn nun aber alle 5 Stücke des Ellipsensegmentes zu

den 5 Stücken des Kreissegmentes in dem Verhältniß b : a stehen, so müssen nothwendigerweise auch die Segmente selbst in diesem Verhältniß sein.

Das Ellipsoid.

Drehen wir eine Ellipse um ihre große Axe, so entsteht ein länglicher, einem Ei ähnlicher Körper, dessen Längendurchschnitt die ursprüngliche Ellipse und dessen Querschnitte, wenn sie auf die große Ellipsenaxe oder Drehungsaxe senkrecht genommen werden, sämmtlich Kreise sind, deren größter die kleine Axe der Ellipse zum Durchmesser hat.

Der so entstandene Körper ist ein *längliches Rotationsellipsoid*, wir werden es in der Folge mit a, b, b bezeichnen Fig. 10.

Die 2 Längsdurchschnitte AFBG und ADBE sind der ursprünglichen Ellipse a, b gleich und der größte Querdurchschnitt FDGE ist ein Kreis mit dem Halbmesser b.

Drehen wir aber eine Ellipse um ihre kleine Axe, so entsteht ein rundlicher, platter Körper. Der größte Schnitt, welcher senkrecht auf die kleine oder Drehungsaxe gelegt wird, ist ein Kreis, welcher die große Ellipsenaxe zum Durchmesser hat. Alle andern zu diesem Kreise senkrechten Schnittebenen, welche durch die Drehungsaxe gehen, schneiden den Körper in Ellipsen, welche der ursprünglichen gleich sind.

Der so entstandene Körper ist ein *plattes Rotationsellipsoid*, das wir in Zukunft mit a, a, b bezeichnen werden Fig. 11.

Der Schnitt AEBD ist ein Kreis mit dem Radius a, die 2 darauf senkrechten und durch die kleine Axe gelegten Schnitte AGBF und DGEF können als die gedrehte Ellipse genommen werden.

Diese Rotationsellipsoide heißen *zweiaxig*, weil, wenn man

im Centrum der ursprünglichen Ellipse auf deren Drehungsaxe Senkrechte errichtet, dieselben im ersteren Falle alle = b und im zweiten Falle alle = a sind.

Von den 3 Dimensionen der Rotationsellipsoide sind je 2 gleich.

Dreiaxig heißt ein Ellipsoid, wenn es einen größten und einen kleinsten Längscentralschnitt hat, welche beiden Schnitte Ellipsen von der Form a, b und a, c sind und senkrecht auf einander stehen. Das dreiaxige Ellipsoid hat aber auch einen kleinsten Centralquerschnitt, welcher eine Ellipse von der Form b, c bildet.

Fig. 12 sei ein dreiaxiges Ellipsoid; es ist $a > b > c$.

Der größte Längscentralschnitt ist die Ellipse AGBF von der Form a, b; der kleinste Längscentralschnitt ist die Ellipse ADBE von der Form a, c und der kleinste Quercentralschnitt ist die Ellipse DFEG von der Form b, c.

Ein solches dreiaxiges Ellipsoid bezeichnen wir fürderhin mit a, b, c. —

Rotationsellipsoide.

Wie die Ellipse in constantem Verhältniß zu dem ihr um- oder eingeschriebenen Kreise steht, ist auch das Rotationsellipsoid stets proportional der ihm um- oder eingeschriebenen Kugel.

Ein längliches Rotationsellipsoid a, b, b verhält sich zur eingeschriebenen Kugel, Radius b, wie die große Axe zur kleinen.

Ellipsoid a, b, b : Kugel b = a : b

und da Inhalt der Kugel $= \frac{4}{3} \cdot b^3 \cdot \pi$

so ist der Inhalt des Ellipsoids a, b, b

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{4}{3} \cdot b^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot a \cdot b^2 \cdot \pi.$$

Beweis. Fig. 13.

Wir legen zunächst 2 zu einander senkrechte Längscentralschnitte durch das Ellipsoid, der eine sei ADHK und der andere ALH, welche beide der ursprünglichen Ellipse a, b gleich sind; aber auch die eingeschriebene Kugel wird durch dieselben Ebenen in 2 größten Kreisen BDIK und BLI geschnitten, welche sich zu obigen Ellipsen wie b : a verhalten.

Legen wir nun parallel zur Ebene ALH die Ebene GOP, so wird das Ellipsoid durch dieselbe in der Ellipse GOP und die Kugel im Kreis FOR geschnitten.

Weil aber GE : FE = a : b, so verhält sich auch Ellipse GOP : Kreis FOR = a : b.

Da aber dieses Grundverhältniß bei allen parallelen Schnitten stattfindet und die Summe aller Zonen zwischen unendlich vielen solchen Schnitten sowohl das Ellipsoid, als auch die ihm eingeschriebene Kugel vorstellt, so muß nothwendigerweise das gleiche Verhältniß auch für die Inhalte des Ellipsoids und der eingeschriebenen Kugel gelten.

Inhalt der Calotte am Ellipsoid a, b, b; Schnitt || zur Drehungsaxe.

Aber nicht nur der Inhalt des ganzen Ellipsoids verhält sich zum Inhalt der eingeschriebenen Kugel wie a : b, sondern auch der Inhalt der Ellipsoidscalotte GOPD steht zur Kugelcalotte FORD in dem nämlichen Verhältniß.

Da nun Inhalt der Kugelcalotte $= \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3b - h)$ ist, wobei h die Höhe DE der beiden Calotten und b den Radius der Kugel bedeutet,

so ist Inhalt der Ellipsoidcalotte $= \frac{a}{b} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3b - h)$.

Setzen wir probeweise h = b, wodurch die Calotte bis in die Mitte des Ellipsoids genommen wird, so erhalten wir für den Inhalt des halben Rotationsellipsoids a, b, b den Ausdruck $\frac{2}{3} \cdot a \cdot b^2 \cdot \pi$.

Das längliche Ellipsoid a, b, b verhält sich zur umschriebenen Kugel, Radius a, wie das Quadrat der kleinen Axe zum Quadrat der großen.

$$\text{Ellipsoid a, b, b} : \text{Kugel a} = b^2 : a^2$$

und da Inhalt der Kugel $= \frac{4}{3} \cdot a^3 \cdot \pi$

so ist der Inhalt des Ellipsoids a, b, b

$$= \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{4}{3} \cdot a^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot a \cdot b^2 \cdot \pi.$$

Beweis. Fig. 14.

Es verhaltet sich

$$OE : OF = CG : CD = b : a$$

und deßhalb Fläche des Kreises OE : Kreisfläche $OF = b^2 : a^2$ und da dieses Verhältniß für alle parallelen Schnitte gilt, so verhält sich auch

$$\text{Ellipsoid a, b, b} : \text{Kugel a} = b^2 : a^2.$$

Inhalt der Calotte am Ellipsoid a, b, b; Schnitt $\perp$ zur Drehungsaxe.

Im gleichen Verhältniß stehen auch die 2 Calotten AEO und AFO und da Inhalt der Kugelcal. $= \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3a - h)$

wo AC = a und AO = h gesetzt ist,

so ist Inhalt der Ell.-Cal. $= \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3a - h).$

Nehmen wir zur Prüfung wieder h = a wodurch die Calotte zum halben Ellipsoid anwächst, so ergibt sich für dessen Inhalt auch wieder:

$$\frac{2}{3} \cdot a \cdot b^2 \cdot \pi.$$

Ein plattes Rotationsellipsoid a, a, b verhält sich zur umschriebenen Kugel, Radius a, wie die kleine Axe zur großen.

$$\text{Ellipsoid a, a, b} : \text{Kugel a} = b : a$$

und da Inhalt der Kugel $= \frac{4}{3} \cdot a^3 \cdot \pi$

so ist Inhalt des Ellipsoids a, a, b

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{4}{3} \cdot a^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot a^2 \cdot b \cdot \pi.$$

Beweis. Fig. 15.

AFBH sei die ursprüngliche Ellipse, welche um ihre kleine Axe HF gedreht worden ist und AEBDG die umschriebene Kugel.

Wir legen nun 2 zu einander senkrechte Ebenen durch die kleine Axe und erhalten dadurch am Ellipsoid die Schnitte AFB und DFE, welche der ursprünglichen Ellipse gleich sind, während die Kugelschnitte die Kreise AGB und DGE geben, welche den Ellipsen umschrieben sind.

Die Ebene KQL wird nun, beliebigen Ortes, parallel zur Ebene AGB und somit senkrecht zur Ebene DGE gedacht. Sie schneidet das Ellipsoid in der Ellipse KPL und die Kugel in dem dieser Ellipse umschriebenen Kreis KQL.

Es verhält sich nun:

Ell. AFB : Kreis AGB = b : a

und desgl. Ell. KPL : Kreis KQL = b : a.

Da dieses Verhältniß für alle parallelen Schnitte bleibt, so verhält sich also auch

Ell. a, a, b : Kugel a = b : a.

Inhalt der Calotte am Ellipsoid a, a, b; Schnitt parallel zur Drehungsaxe.

Im gleichen Verhältniß b : a stehen auch die beiden Calotten KPLD und KQLD.

Setzen wir AC = CD = a und OD = h

so ist, da der Inhalt der Kugelcal. $= \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3a - h)$ ist,

der Inhalt der Ellipsoidscalotte $= \frac{b}{a} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3a - h)$,

aus welcher Formel, wenn h = a gesetzt wird, man den Inhalt des halben Ellipsoids a, a, b $= \frac{2}{3} a^2 \cdot b \cdot \pi$ bekommt.

Ein plattes Rotationsellipsoid a, a, b verhält sich zur eingeschriebenen Kugel, Radius b, wie das Quadrat der großen Axe zum Quadrat der kleinen Axe.

Ellipsoid a, a, b : Kugel $b = a^2 : b^2$

Inhalt der Kugel $= \frac{4}{3} \cdot b^3 \cdot \pi$ folglich

Inhalt des Ellipsoids a, a, b

$$= \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{4}{3} \cdot b^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot a^2 \cdot b \cdot \pi.$$

Beweis. Fig. 16.

AEBD sei ein plattes Ellipsoid, das durch Umdrehung der Ellipse AEBD um ihre kleine Axe DE entstanden ist.

Der zur Drehungsaxe senkrechte Centralschnitt schneidet das Ellipsoid in dem Kreise AQB und die eingeschriebene Kugel im Kreis HPI.

Zwei andere durch die Drehungsaxe gelegte Ebenen stehen senkrecht zur vorigen und schneiden das Ellipsoid in der Ellipse DQE und AEBD und die eingeschriebene Kugel in den Kreisen DPE und HEID.

Alle zur Drehungsaxe senkrechten und deshalb unter sich parallelen Schnitte schneiden sowohl das Ellipsoid als die eingeschriebene Kugel in Kreisen, die stets in dem Verhältniß $a^2 : b^2$ zu einander stehen.

Es verhält sich nämlich

$$CQ : CP = CA : CH = a : b$$

und $ON : OM = OF : OK = a : b$

und da sich Kreise dem Inhalte nach verhalten wie die Quadrate ihrer Halbmesser, so verhält sich

$$\text{Kreis AQB} : \text{Kreis HPI} = a^2 : b^2$$

und $\text{Kreis FNG} : \text{Kreis KML} = a^2 : b^2$.

Da dieses Verhältniß für alle parallelen Schnitte bleibt und die Summe aller Zonen zwischen diesen Schnitten sowohl

das Ellipsoid, als auch die eingeschriebene Kugel ausmachen, so verhält sich auch

$$\text{Ell. } a, a, b : \text{Kugel } b = a^2 : b^2.$$

Inhalt der Calotte am Ellipsoid a, a, b; Schnitt senkrecht zur Drehungsaxe.

Das gleiche Raumverhältniß gilt auch für die beiden Calotten FNGD und KMLD.

$$\text{Inhalt der Kugelcalotte} = \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3b - h)$$

wo OD = h und CH = CP = b gesetzt ist.

$$\text{Inhalt der Ellipsoidcalotte} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3b - h).$$

Auch hier bekommen wir als Inhalt des halben Ellipsoids AQBD, wenn wir h = b setzen $\frac{2}{3} a^2 \cdot b \cdot \pi$.

Das dreiaxige Ellipsoid.

Fig. 12.

Die drei Hauptschnitte durch das dreiaxige Ellipsoid geben uns die drei Ellipsen a, b; a, c und b, c.

Durch Umdrehung um jede ihrer Axen können aus den drei Ellipsen Umdrehungsellipsoide gebildet werden, von denen drei länglich und drei platt sind. Drei davon sind dem dreiaxigen Ellipsoid umgeschrieben und die drei anderen sind ihm eingeschrieben.

Dieselben sind:

a, b, b	längliches	Ellipsoid	dem 3axigen a, b, c	umgeschrieben,
a, a, b	plattes	„	„ „ a, b, c	„
a, c, c	längliches	„	„ „ a, b, c	eingeschrieben,
a, a, c	plattes	„	„ „ a, b, c	umgeschrieben,
b, c, c	längliches	„	„ „ a, b, c	eingeschrieben,
b, b, c	plattes	„	„ „ a, b, c	„

Zu jedem dieser 6 Rotationsellipsoide steht das dreiaxige in einem besonderen Verhältniß, was hier weiter erörtert werden soll.

Das dreiaxige Ellipsoid a, b, c verhält sich zum umschriebenen Rotationsellipsoid a, b, b wie die kleine Axe zur mittleren.

Ellipsoid a, b, c : Ellipsoid a, b, b = c : b

Inhalt von Ellipsoid a, b, b $= \frac{4}{3} \cdot a \cdot b^2 \cdot \pi$

Inhalt des Ellipsoids a, b, c

$$= \frac{c}{b} \cdot \frac{4}{3} \cdot a \cdot b^2 \cdot \pi = \frac{4}{3} a \cdot b \cdot c \cdot \pi.$$

Beweis:

Fig. 12 ist ein dreiaxiges Ellipsoid mit den drei Hauptschnitten a, b; a, c und b, c.

Drehen wir die Ellipse a, b um die Axe a, so erhalten wir das Rotationsellipsoid a, b, b. Der Radius b beschreibt eine Kreisfläche, zu der sich die Ellipse b, c verhält wie c : b.

Dieses Verhältniß gilt aber für alle Kreise und Ellipsen, welche entstehen, wenn man zu b, c parallele Ebenen durch die beiden Ellipsoide legt, wodurch obiger Satz bewiesen ist.

Calotteninhalt, Schnitt $\perp$ a.

Der Inhalt der Calotte am Ellipsoid a, b, b

$$= \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3a - h)$$

wenn der Schnitt $\perp$ zu a und daher auch Inhalt der Calotte am Ellipsoid a, b, c

$$= \frac{c}{b} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3a - h) = \frac{b \cdot c}{a^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3a - h).$$

Setzen wir h = a, so erhalten wir:

Inhalt des halben Ellipsoids a, b, c $= \frac{2}{3} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \pi.$

Das dreiaxige Ellipsoid a, b, c verhält sich zum

umschriebenen Rotationsellipsoid a, a, b wie die kleine Axe zur großen.

Ellipsoid a, b, c : Ellipsoid a, a, b = c : a

Inhalt des Ellipsoids a, a, b $= \frac{4}{3} \cdot a^2 \cdot b \cdot \pi$

Inhalt des Ellipsoids a, b, c

$$= \frac{c}{a} \cdot \frac{4}{3} \cdot a^2 \cdot b \cdot \pi = \frac{4}{3} a \cdot b \cdot c \cdot \pi.$$

Drehen wir die Ellipse a, b (Fig. 12) um die Axe b, so erhalten wir das platte Rotationsellipsoid a, a, b. Der Radius a beschreibt eine Kreisfläche, welche sich zur Ellipse a, c verhält wie a : c.

Da alle zu dieser Ebene parallelen Schnitte die beiden Ellipsoide in Ellipsen und Kreisen schneiden, welche stets im Verhältniß c : a stehen, so werden auch die Ellipsoide selber dieses Verhältniß bewahren, wodurch obige Behauptung gerechtfertigt ist.

Inhalt der Calotte; Schnitt ⊥ zur mittleren Axe b.

Der Inhalt der Calotte am Ellipsoid a, a, b

$$= \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3b - h)$$

wenn der Schnitt ⊥ zu b

folg. Inhalt der Calotte am Ellipsoid a, b, c

$$= \frac{c}{a} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3b - h)$$

$$= \frac{a \cdot c}{b^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3b - h).$$

Das dreiaxige Ellipsoid a, b, c verhält sich zum eingeschriebenen Rotationsellipsoid a, c, c wie die mittlere Axe zur kleinen.

Ellipsoid a, b, c : Ellipsoid a, c, c = b : c

Inhalt des Ellipsoids a, c, c $= \frac{4}{3} \cdot a \cdot c^2 \cdot \pi$

Inhalt des Ellipsoids a, b, c

$$= \frac{b}{c} \cdot \frac{4}{3} \cdot a \cdot c^2 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \pi.$$

Drehen wir die Ellipse a, c (Fig. 12) um a, so erhalten wir das Rotationsellipsoid a, c, c; der Radius c beschreibt eine Kreisfläche zu der sich die Ellipse b, c verhält wie b : c.

Da dieß für alle parallelen Schnitte gilt ꝛc.

Inhalt der Calotte; Schnitt ⊥ zu a.

Inhalt der Calotte am Ellipsoid a, c, c

$$= \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{2} \cdot (3a - h)$$

Inhalt der Calotte am Ellipsoid a, b, c

$$= \frac{b}{c} \cdot \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3a - h)$$

$$= \frac{b \cdot c}{a^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3a - h).$$

Das dreiaxige Ellipsoid a, b, c verhält sich zum umschriebenen Rotationsellipsoid a, a, c wie die mittlere zur großen Axe.

Ellipsoid a, b, c : Ellipsoid a, a, c = b : a

Inhalt des Ellipsoids a, a, c $= \frac{4}{3} \cdot a^2 \cdot c \cdot \pi$

Inhalt des Ellipsoids a, b, c

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{4}{3} \cdot a^2 \cdot c \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \pi.$$

Beweis.

Drehen wir die Ellipse a, c um die Axe c, so erhalten wir das Rotationsellipsoid c, a, a. Der Radius a beschreibt eine Kreisfläche, zu welcher sich die Ellipse a, b verhält wie b : a.

Dieß gilt aber für alle parallelen Schnitte, folglich ꝛc.

Inhalt der Calotte; Schnitt ⊥ c.

Inhalt der Calotte am Ellipsoid a, a, c

$$= \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3c - h)$$

Inhalt der Calotte am Ellipsoid a, b, c

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3c - h) = \frac{a \cdot b}{c^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3c - h).$$

Das dreiaxige Ellipsoid a, b, c verhält sich zum eingeschriebenen Rotationsellipsoid b, c, c wie die große Axe zur kleinen.

Ellipsoid a, b, c : Ellipsoid b, c, c = a : c

Inhalt des Ellipsoids b, c, c $= \frac{4}{3} \cdot b \cdot c^2 \cdot \pi$

Inhalt des Ellipsoids a, b, c

$$= \frac{a}{c} \cdot \frac{4}{3} \cdot b \cdot c^2 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \pi.$$

Beweis.

Drehen wir die Ellipse b, c um die Axe b, so erhalten wir das Rotationsellipsoid b, c, c. — Der Radius c beschreibt eine Kreisfläche, zu der sich die Ellipse a, c verhält wie a : c.

Da dieß ꝛc.

Inhalt der Calotte; Schnitt $\perp$ b

Inhalt der Calotte am Ellipsoid b, c, c

$$= \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3b - h)$$

Inhalt der Calotte am Ellipsoid a, b, c

$$= \frac{a}{c} \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3b - h) = \frac{a \cdot c}{b^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3b - h).$$

Das dreiaxige Ellipsoid a, b, c verhält sich zum eingeschriebenen Rotationsellipsoid b, b, c wie die große Axe zur mittleren.

Ellipsoid a, b, c : Ellipsoid b, b, c = a : b

Inhalt des Ellipsoids b, b, c $= \frac{4}{3} \cdot b^2 \cdot c \cdot \pi$

Inhalt des Ellipsoids a, b, c

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{4}{3} \cdot b^2 \cdot c \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \pi.$$

Beweis.

Drehen wir die Ellipse b, c um die Axe c, so erhalten wir das Rotationsellipsoid b, b, c. — Der Radius b beschreibt einen Kreis, zu dem sich die Ellipse a, b verhält wie a : b.

Da dieses Verhältniß ꝛc.

Inhalt der Calotte, Schnitt ⊥ c

Inhalt der Calotte des Ellipsoids b, b, c

$$= \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3c - h)$$

Inhalt der Calotte des Ellipsoids a, b, c

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3c - h)$$

$$= \frac{a \cdot b}{c^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3c - h).$$

Schiefe Schnitte.

Auch zu den Axen schiefe Segmente vom Rotationsellipsoid stehen in nämlichen Verhältnissen zu ihren Projectionssegmenten der ein- oder umgeschriebenen Kugel wie die senkrecht abgeschnittenen.

Jeder Schnitt durch ein Rotationsellipsoid ist entweder ein Kreis oder eine Ellipse. Die zur Schnittfläche senkrechte Ebene, welche man durch die große Axe (Schnitt am länglichen Ellipsoid) der Schnittellipse legt, muß durch die große Axe des Ellipsoids gehen. Wir denken uns einfach durch einen Endpunct der großen Ellipsoidsaxe eine Schnittebene durch den Körper gelegt. Es muß nun die große Axe der Schnittellipse mit der großen Ellipsoidaxe in einer Ebene liegen, welche ⊥ zur Schnittebene steht. Dasselbe gilt auch für alle zu diesem Schnitt parallelen Schnitte.

Es sei ADBEF Fig. 17 ein längliches Rotationsellipsoid a, b, b und qypx die schiefe Schnittfläche, welche mit den

beiden Axen die Winkel α und $90^0 - \alpha$ macht. Es ergibt sich nun:

Das schiefe Segment am länglichen Ellipsoid verhält sich zu seinem Projectionssegment auf der eingeschriebenen Kugel wie die große Axe zur kleinen.

$$Zqypx : wsvtu = a : b.$$

Beweis.

pxqy sei der schiefe Schnitt, welcher mit der kleinen Axe den Winkel α macht. svtu ist der Projectionsschnitt an der Kugel, er macht mit der kleinen Axe den $\angle \beta$, welcher nach früherem bestimmt ist, nämlich

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Die Ebene Aqstp ist senkrecht zu den beiden genannten Schnitten und geht durch die große Axe des Ellipsoids. Zu dieser Ebene senkrecht legen wir eine andere ZYG, welche zur großen Axe parallel wird und das Ellipsoid in einer Ellipse und die Kugel in einem Kreise schneidet.

Wir haben nun wieder wie früher die Proportion:

$$zxy : wuv = a : b$$

und da dieß für alle parallelen Schnitte gilt, so verhaltet sich auch

$$pzqxy : twsvu = a : b$$

oder

$$\text{Ellipsoidsegment} = \frac{a}{b} \cdot \text{Kugelsegment}.$$

Das Kugelsegment wird durch st bestimmt; da aber $st = pq \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ so können wir auch h oder die Höhe der Kugelcalotte bestimmen wie folgt:

$$h = b \pm \sqrt{b^2 - \tfrac{1}{4} st^2}$$

und da der Inhalt der Kugelcalotte

$$= \frac{h^2\pi}{3} \cdot (3b - h), \text{ so ist}$$

Inhalt der Ellipsoidcalotte $= \frac{a}{b} \cdot \frac{h^2\pi}{3} \cdot (3b - h)$.

Eine schief abgeschnittene Calotte am platten Ellipsoid verhält sich zu ihrer Projectionscalotte an der umschriebenen Kugel wie die kleine Axe zur großen.

$$pyqz : svtw = b : a.$$

Beweis. Fig. 18. Aehnlich wie der vorige. — Es ist aber zu bemerken, daß die zur Schnittfläche senkrechte Ebene stqp, welche durch die kleine Axe pq der Ellipse gelegt wird, durch die kleine Axe des Ellipsoids gehen muß. Die Erklärung hievon ist ebenfalls der vorigen ähnlich.

Am dreiaxigen Ellipsoid haben wir außer den schon besprochenen senkrechten Segmenten noch zweierlei schiefe Schnitte ins Auge zu fassen. Die erste Art ist diejenige, wo die Schnittebene zu einer der 3 Axenebenen ⊥ und gegen die beiden andern geneigt ist und bei der andern bildet die Schnittfläche mit allen 3 Axenebenen Winkel, ist also mit keiner parallel und zu keiner senkrecht.

Ein zur Ebene a, b senkrechter, aber zu den beiden andern Ebenen b, c und a, c geneigter Schnitt schneidet vom dreiaxigen Ellipsoid ein Stück ab, welches sich zu seinem Projectionssegment auf dem eingeschriebenen Rotationsellipsoid b, c, c verhaltet wie die große Axe zur kleinsten.

$$pzyq : svwt = a : c.$$

Beweis. Fig. 19.

Die Zeichnung giebt den Schnitt der Ebene a, b durch das dreiaxige sowohl als das Rotationsellipsoid an. Senkrecht zu dieser Ebene und parallel mit a, c ist eine Ebene zyx gelegt, welche das dreiaxige Ellipsoid in einer Ellipse und das eingeschriebene zweiaxige in einem Kreis schneidet, der sich zu der Ellipse verhält wie c : a.

Dasselbe Verhältniß findet daher auch bei den Stücken

zxy und vuw statt und somit auch für die ganzen Körpertheile pzqy und svwt.

Daß die Verlängerungen von pq und st in dem Punct o der verlängerten mittleren Axe zusammentreffen, ist erklärlich, weil diese drei Linien alle in der gleichen Ebene liegen und

$$qm : tm = pn : sn = a : c.$$

Um das Segment pzqy bestimmen zu können, muß gegeben sein pq und $\angle \alpha$ sowie a, b und c.

Es ist hier $tg\beta = \frac{c}{a} \cdot tg\alpha$ und $st = pq \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$

Das Segment des Rotationsellipsoids kann nun nach früherem auf die um- oder in dasselbe geschriebene Kugel projiciert und dadurch bestimmt werden.

Es kann beim dreiaxigen Ellipsoid selbstverständlich jedes der sechs ein- oder umschriebenen Rotationsellipsoide zu Hülfe genommen werden, man wird natürlich immer dasjenige wählen, bei welchem die Projection am ungezwungensten sich machen läßt.

Wir wollen uns mit dem angeführten Beispiele begnügen und den letzten Fall betrachten, wo die Schnittebene gegen alle drei Axenebenen geneigt ist.

Ein Schnitt am dreiaxigen Ellipsoid, dessen Schnittebene gegen alle drei Axen geneigt ist, verhält sich zu seinem Projectionsschnitt auf dem eingeschriebenen langen Rotationsellipsoid b, c, c wie a : c.

Beweis. Fig. 20.

Die Figur ist ein dreiaxiges Ellipsoid

$$AC = a,\ DC = b,\ KC = c$$

pq ist die große Axe der Schnittellipse, welche auf der vorderen Seite der Ebene a, b liegt, wie aus ihrer Projection GI auf der Ebene b, c gesehen werden kann. sr ist die Axe der projicierten Ellipse auf dem Ellipsoid b, c, c und fällt natürlich auch auf die vordere Seite der Ebene a, b.

Die drei Geraden pq, rs und IG liegen in der gleichen Ebene und schneiden sich in einem Puncte und zwar in dem

Punct o, wo die rs die Axe b schneidet, aus denselben Gründen, welche schon früher erläutert worden sind.

Wir schneiden die Figur parallel zu Ebene a, c durch die Ebene zyF, welche die beiden Ellipsoidsegmente in dem Ellipsensegment zxy und dem Kreissegment wuv schneidet und da $zxy = \frac{a}{c} \cdot uvw$ und dieß Verhältniß bei allen Parallelschnitten durch die beiden Ellipsoidsegmente das nämliche ist, so gilt es auch für diese Segmente selber.

Wenn nun $\angle$ pIo = 90°
poI = α
roI = β
IoL = γ
pIL = rIL = 90°

und pq, sowie $\angle\alpha$ und $\angle\gamma$ als bekannt angenommen werden,

$$\text{so ist } tg\beta = \frac{c}{a} \cdot tg\alpha \text{ und } rs = pq \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

Man hat jetzt nur noch den $\angle$ roL zu bestimmen, den rs mit der Axe b macht, um das Segment rs auf eine Kugel zu projicieren und mit Hülfe dieses Winkels zu berechnen.

$$\text{Cos } (roL) = \cos\beta \cdot \cos\gamma.$$

Ellipsoid und Cylinder.

Inhalt der Kugel: Der Inhalt einer Kugel ist $^2/_3$ des Inhaltes von dem derselben umschriebenen Cylinder.

Fig. 21.

AOCH ist ein Quadrat,

OCH ist ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck,

AOCE ist ein Quadrant, dessen Halbmesser die Quadratseite

Denkt man sich diese drei Figuren um OC herumgedreht, so hat AOCH einen Cylinder,

OCH einen Kegel

und AOCE eine Halbkugel beschrieben.

DG ist || AO folglich △ EOG rechtwinklig und daher

$$EO^2 = EG^2 + GO^2$$

oder $$DG^2 = EG^2 + GF^2$$

oder $$DG^2 \cdot \pi = EG^2 \cdot \pi + GF^2 \cdot \pi.$$

$DG^2 \cdot \pi$ ist aber der Flächeninhalt des Kreises, der durch Umdrehung von DG entstanden ist und ist gleich groß wie die Grundfläche des Cylinders ABIH;

$EG^2 \cdot \pi$ ist der Flächeninhalt des Kreises, der durch Umdrehung von EG entstanden ist;

$FG^2 \cdot \pi$ ist der Flächeninhalt des Kreises, der durch Umdrehung von FG entstanden ist.

Diese drei Kreisflächen entstehen aber in Wirklichkeit, wenn wir die drei Rotationskörper Cylinder, Kugel und Kegel durch eine mit den Grundflächen || Ebene DG schneiden.

$DG^2 \cdot \pi$ ist der Kreisschnitt durch den Cylinder,

$EG^2 \cdot \pi$ „ „ „ „ die Kugel,

$GF^2 \cdot \pi$ „ „ „ „ den Kegel,

und da nach oben $DG^2 \cdot \pi = EG^2 \cdot \pi + GF^2 \cdot \pi$

so ist also jedesmal der

Cylinderschnitt = Kugelschnitt + Kegelschnitt,

und da die Summe aller Parallelschichten zwischen den Schnittflächen den körperlichen Inhalt der drei Körper selber ausmacht, so ist

Inhalt des Cylinders = Inhalt der Kugel + Inhalt des Kegels

oder Kugel = Cylinder — Kegel

$$\text{oder Kugel} = \frac{2}{3} \text{ Cylinder.}$$

$$\text{Inhalt des Cylinders} = r^2 \cdot \pi \cdot 2r = 2r^3 \cdot \pi$$

$$\text{Kugel} = \frac{2}{3} \cdot 2r^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} r^2 \cdot \pi.$$

Inhalt der Calotte. Fig. 21.

Wenn h die Höhe der Calotte ist, so ist nach vorigem

Inh. der Calotte = Inh. des Cylinders — Inh. des abg. Kegels (beide von der Höhe h)

Inhalt des Cylinders $= R^2 \cdot \pi \cdot h$

Inhalt des abg. Kegels $= \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi \cdot (R^2 + r^2 + Rr)$

Da aber $r = R - h$ so ist

$$= \frac{1}{3} h \cdot \pi \cdot \left[(R^2 + (R-h)^2 + R \cdot (R-h)\right]$$

der Inhalt des abgestumpften Kegels

$$= R^2 \cdot h \cdot \pi - R \cdot h^2 \cdot \pi + \frac{1}{3} h^3 \cdot \pi$$

Inhalt der Calotte

$$= R^2 \cdot \pi \cdot h - (R^2 \cdot h \cdot \pi - R \cdot h^2 \cdot \pi + \frac{1}{3} h^3 \cdot \pi)$$

$$= \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3r - h).$$

Wie die Kugel an Inhalt $\frac{2}{3}$ des ihr umschriebenen Cylinders ist, so ist auch ein Rotationsellipsoid, sowie ein dreiaxiges immer $\frac{2}{3}$ eines ihm umschriebenen Cylinders, dessen Grundfläche parallel mit zwei Axen und senkrecht zu der dritten ist.

Beweis I. Fig. 22.

Man stellt das Rotationsellipsoid a, b, b in einen Kreiscylinder, dessen Grundflächendurchmesser die kleine Axe und dessen Höhe die große Axe ist, um zu zeigen, daß auch hier wie bei der Kugel bei jedem Schnitt der Schnitt durch den Cylinder = dem Schnitt durch das Ellipsoid + dem Schnitt durch den Kegel ist.

ABCD ist ein Rechteck, dessen Grundlinie CA zugleich die halbe kleine Axe der Ellipse ACDG sei.

Zieht man EF $\perp$ CD oder $\parallel$ AC, so ist

$$GF = LK$$
$$HF = IK = KC.$$

Es ist zu zeigen, daß die Gerade, welche durch die Puncte I und L geht $\parallel$ mit AC oder HG sei.

Es ist $HN : NC = BA : AC = a : b$

und da $GM : LM = a : b$

und $HN = GM$

so muß $HI = GL$ d. h. HGIL ein rechtwinkliges Parallelogramm sein,

also IL $\parallel$ HG oder AC.

Da aber $CL^2 = KL^2 + KC^2$

so ist auch $CL^2 = GF^2 + KI^2$

oder $EF^2 = GF^2 + HF^2$

und auch $EF^2 \cdot \pi = GF^2 \cdot \pi + HF^2 \cdot \pi$

oder Cylinderschnitt = Ellipsoidschnitt + Kegelschnitt

und also Cylinder = Ellipsoid + Kegel

$$\text{Ellipsoid} = \frac{2}{3} \text{ Cylinder}$$

Inhalt des Cylinders $= b^2\pi \cdot a$

Inhalt des halben Ellipsoids $= \frac{2}{3} ab^2\pi$

Inhalt des ganzen Ellipsoids $= \frac{4}{3} a \cdot b^2 \cdot \pi.$

Inhalt einer Ellipsoidcalotte FD. Fig. 22.

Der körperliche Inhalt einer Ellipsoidcalotte von der Höhe $h = DF$ (Rotationsellipsoid a, b, b durch Drehung um die große Axe erhalten), welche durch einen auf die große Axe $\perp$ Schnitt entsteht, wird gefunden, indem man von dem Cylinder BEGR (dessen Basis der Kreis der kleinen Axe) den abgestumpften Kegel BHSG abzieht.

Inhalt des Cylinders BEGR $= b^2 \cdot \pi \cdot h$

Inhalt eines abg. Kreiskegels $= \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi \cdot (R^2 + r^2 + Rr)$

hier ist nun $R = b$ und $r = \frac{b \cdot (a-h)}{a}$ (weil $b : a = r : a-h$)

woraus Inhalt des abg. Kegels

$$BHSG = \frac{1}{3} h \cdot \pi \cdot \left\{ b^2 + \left(\frac{b \cdot (a-h)}{a}\right)^2 + \frac{b^2 \cdot (a-h)}{a} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} h \cdot \pi \cdot \left\{ 3b^2 - \frac{3b^2 \cdot h}{a} + \frac{b^2 \cdot h^2}{a^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\cdot b^2 \cdot h \cdot \pi}{\cdot a^2} \cdot \left\{ 3a^2 - 3ah + h^2 \right\}$$

Ellipsoid = Cylinder — Kegel

Inhalt desselben $= b^2 \cdot h \cdot \pi - \frac{b^2 \cdot h \cdot \pi}{3 \cdot a^2} \cdot \left\{ 3a^2 - 3ah + h^2 \right\}$

$$= \frac{b^2 \cdot h^2 \cdot \pi}{a} \cdot \left\{ 1 - \frac{h}{3a} \right\} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{h^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3a - h).$$

Setzen wir probeweise $h = a$, wodurch die Calotte zum halben Ellipsoid anwächst, so ist

Inhalt des halben Ellipsoids

$$= \frac{b^2 \cdot a^2 \cdot \pi}{a} \cdot \left\{ 1 - \frac{h}{3a} \right\} = \frac{2}{3} a \cdot b^2 \cdot \pi.$$

Beweis II. Fig. 23.

Dasselbe Rotationsellipsoid kann auch in einem elliptischen Cylinder liegend gedacht werden, dessen Grundfläche = dem der gegebenen Ellipse und dessen Höhe = der kleinen Axe derselben sei.

Concentrisch mit dem Ellipsoid muß eine Kugel (Durchmesser = b) mit umschriebenem Kreiscylinder gedacht und alle diese Körper durch eine Ebene, die parallel zur Grundfläche ist, geschnitten werden.

Der Schnitt durch den elliptischen Cylinder ist eine Ellipse, die $\frac{a}{b}$ mal so groß ist, als der Kreis, in welchem der Kreiscylinder geschnitten wird; ebenso ist der Schnitt durch das Ellipsoid $\frac{a}{b}$ mal so groß, als der Schnitt durch die

Kugel, und der Schnitt durch den elliptischen Kegel $\frac{a}{b}$ mal so groß, als der Schnitt durch den Kreiskegel, und da

Cylinderkreis = Kugelkreis + Kegelkreis,

so ist auch

$$\frac{a}{b} \cdot \text{Cylinderkreis} = \frac{a}{b} \cdot \text{Kugelkreis} + \frac{a}{b} \text{ Kegelkreis}$$

und da die Summe aller parallelen Schichten zwischen unendlich vielen Schnitten sowohl den elliptischen Cylinder, als auch den elliptischen Kegel und das Ellipsoid ausmacht, so folgt daraus

elliptischer Cylinder = Ellipsoid + elliptischer Kegel,

oder Ellipsoid = elliptischer Cylinder — elliptischer Kegel,

oder Ellipsoid = $\frac{2}{3}$ des elliptischen Cylinders.

Inhalt des elliptischen Cylinders $= a \cdot b \cdot \pi \cdot b$

" " " Kegels $= \frac{a \cdot b \cdot \pi \cdot b}{3}$

" " halben Ellipsoids $= \frac{2}{3} \cdot a \cdot b^2 \cdot \pi$

und des ganzen $= \frac{4}{3} \cdot a \cdot b^2 \cdot \pi.$

Inhalt der Ellipsoidcalotte KD. Fig. 23.

Wenn der Schnitt parallel mit der großen Axe gemacht wird, so nehmen wir die gleiche Figur zu Hülfe und finden, daß auch hier wieder Inhalt der Calotte = Inhalt des Cylinders = Inhalt des abg. Kegels (beide von der Höhe der Calotte).

Inhalt des Cylinders $= a \cdot b \cdot \pi \cdot h.$

Inhalt des ganzen Kegels $= \frac{1}{3} a \cdot b^2 \cdot \pi.$

Inhalt des Ergänzungskegels

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{b} (b-h) \cdot (b-h) \cdot \pi \cdot (b-h).$$

Inhalt des abgestumpften $= \frac{a \cdot \pi}{3b} \cdot \left\{ b^3 - (b-h)^3 \right\}$

Inhalt der Ellipsoidcalotte

$$= a \cdot b \cdot h \cdot \pi - \frac{a \cdot \pi}{3b} \cdot \left\{ b^3 - (b-h)^3 \right\} = \frac{a}{b} \cdot \frac{h^2 \pi}{3} \cdot (3b-h).$$

Setzen wir hier wieder $h = b$, so erhalten wir den

Inhalt des halben Ellipsoids $= \frac{a}{b} \cdot \frac{b^2 \cdot \pi}{3} \cdot (3b-b)$

$$= \frac{2}{3} a \cdot b^2 \cdot \pi.$$

Anm. Grundfläche des Ergänzungskegels ist eine Ellipse mit den Axen a_1 und b_1

$$a_1 : (b-h) = a : b$$

$$a_1 = \frac{a}{b} \cdot (b-h)$$

$$b_1 = b-h.$$

Auf gleiche Art und Weise wie das längliche Rotationsellipsoid mit den umschriebenen Cylindern verglichen worden ist, kann es auch mit dem flachen Rotationsellipsoid geschehen; dasselbe muß auch wie das längliche mit einem Kreis- und einem elliptischen Cylinder umhüllt werden.

Beim dreiaxigen Ellipsoid nimmt man, anstatt wie in Figur 23 die eingeschriebene Kugel mit dem ihr umschriebenen Kreiscylinder zu Hülfe genommen wurde, eines der sechs ein- oder umschreibbaren Rotationsellipsoide mit dem ihm umschriebenen Cylinder zu Hülfe.

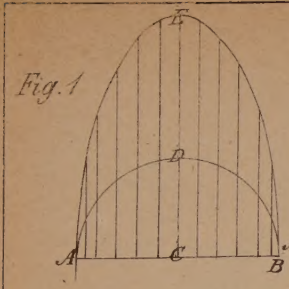
Fig. 1
D
A
C
B

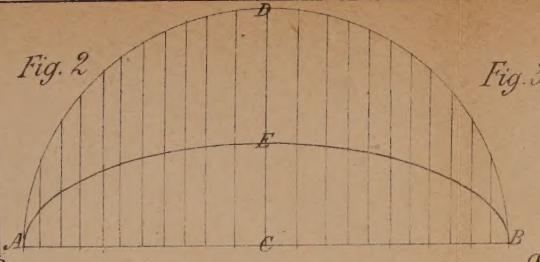
Fig. 2
D
E
A
C
B

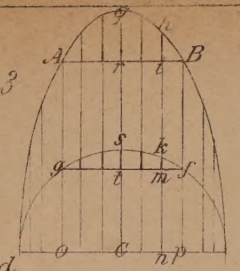
Fig. 3
A
B
g
f
o
C

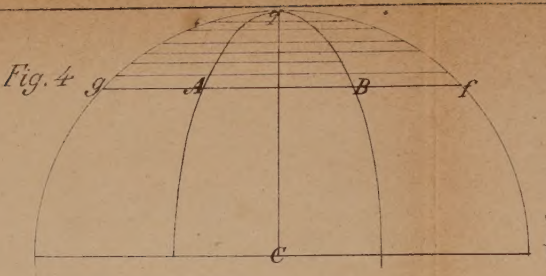
Fig. 4
g
A
B
f
C

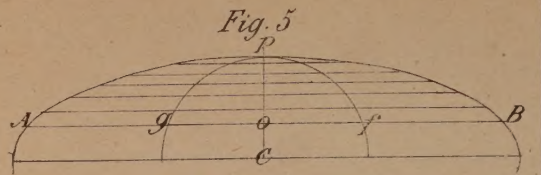
Fig. 5
p
A
g
o
f
B
C

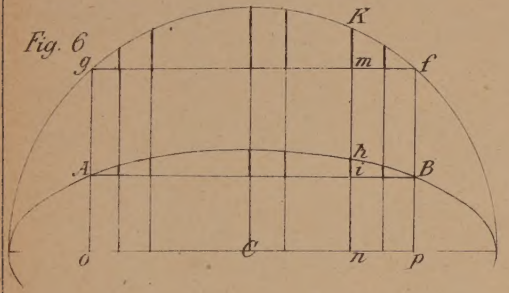
Fig. 6
K
g
m
f
A
h
i
B
o
C
n
p

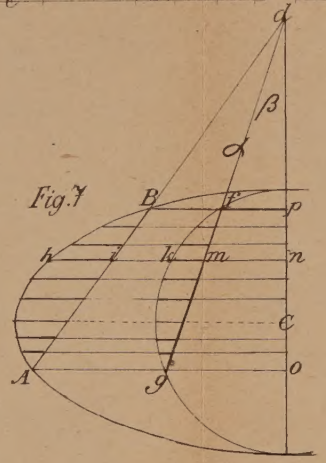
Fig. 7
d
β
α
B
p
h
i
k
m
n
C
A
g
o

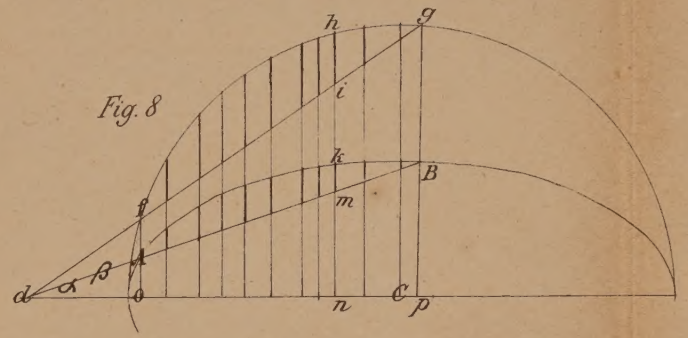
Fig. 8
h
g
i
k
B
m
d
α
β
o
n
C
p

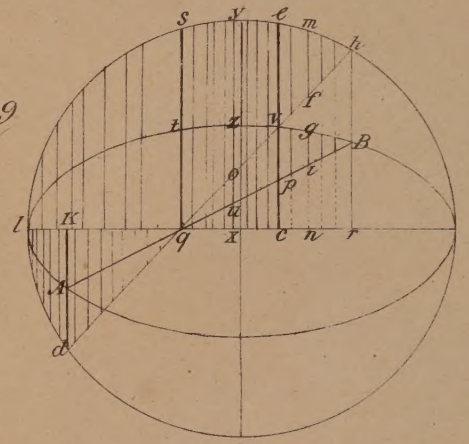
Fig. 9
s
v
c
m
h
f
t
x
y
g
B
i
o
p
u
l
K
q
x
c
n
r
d

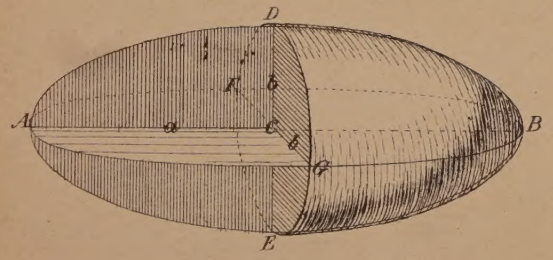
Fig. 10.
D
A
a
C
b
B
G
E

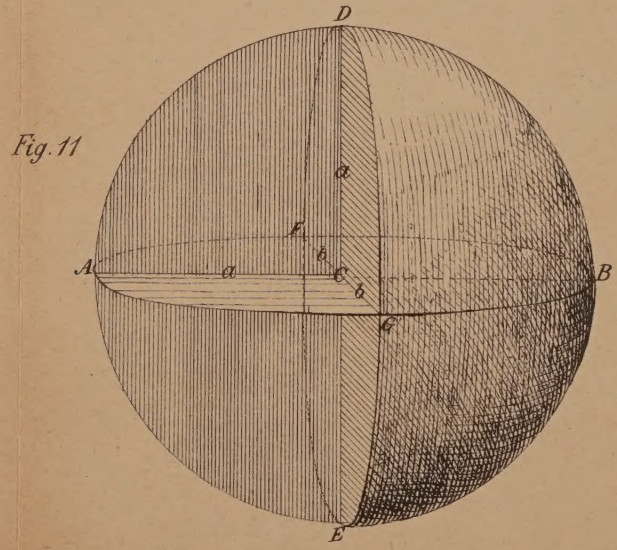
Fig. 11
D
A
a
C
b
B
G
E

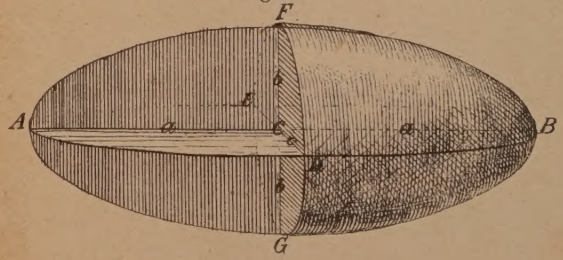
Fig. 12.
F
A
a
C
B
G

Fig. 13.

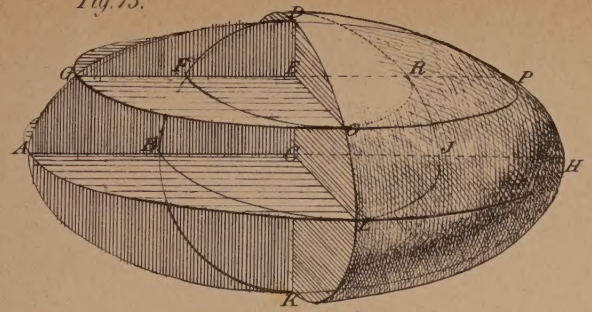

Fig. 14.

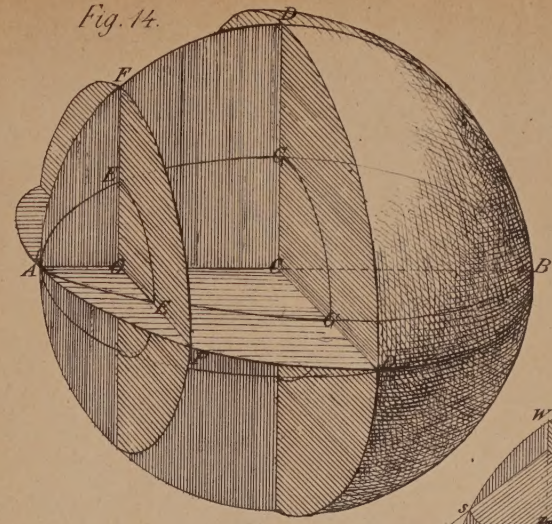

Fig. 15.

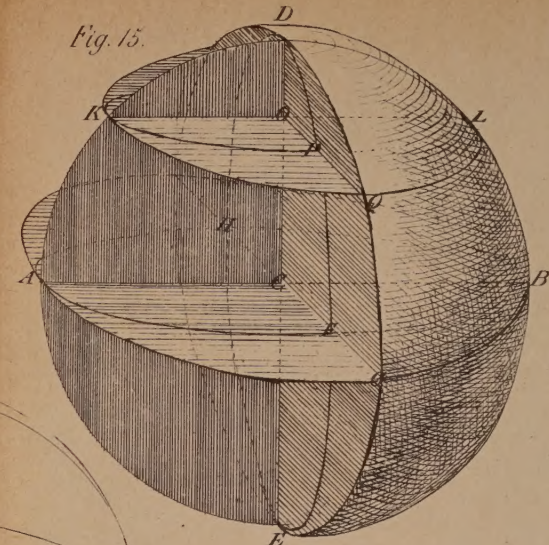

Fig. 16.

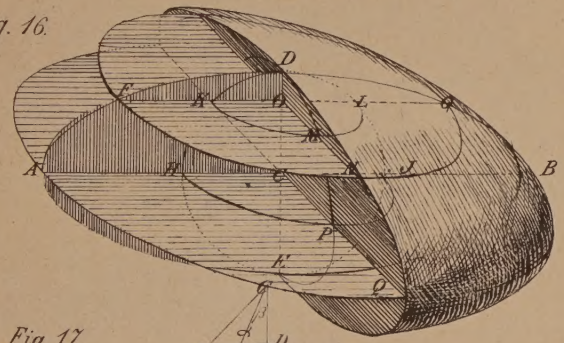

Fig. 17.

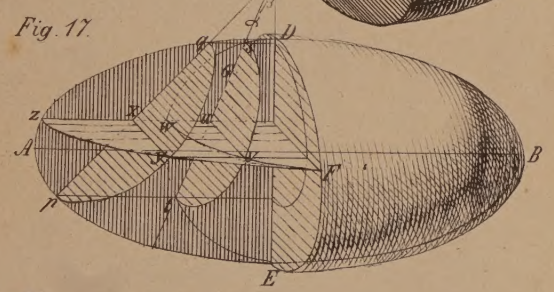

Fig. 18.

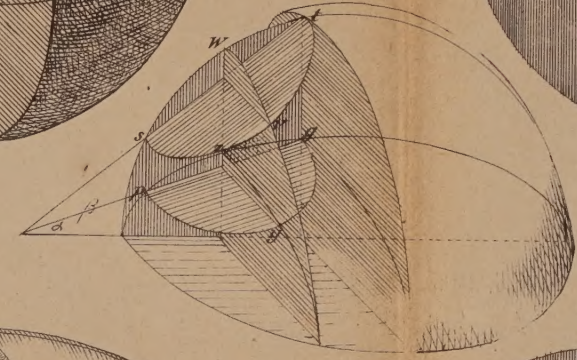

Fig. 19

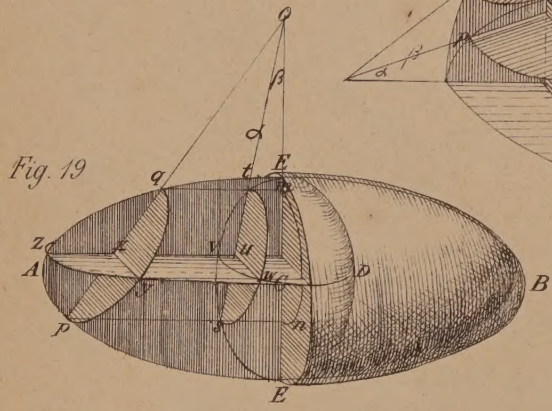

Fig. 20.

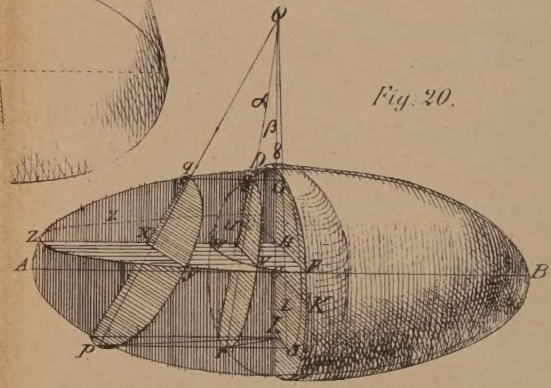

Fig. 21.

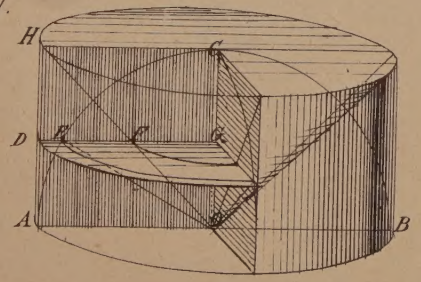

Fig. 22.

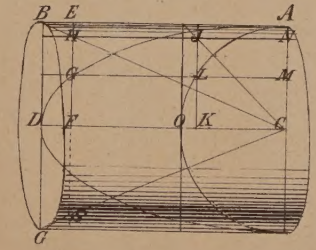
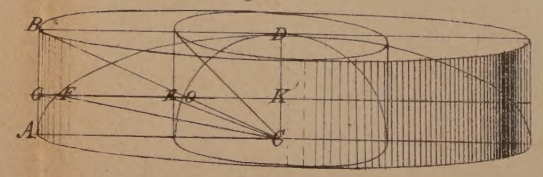
Fig. 23.